ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

2.4 Μέτρα θέσης

Θεωρία

Στη συνέχεια
θα περιγράψουμε κάποια μέτρα, τα ονομαζόμενα **μέτρα θέσης**.

Τα μέτρα θέσης μίας κατανομής, είναι κάποια αριθμητικά μεγέθη
που δίνουν τη θέση του “**κέντρου**” των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα.

Δηλαδή
εκφράζουν την “**κατά μέσο όρο**” **απόστασή** τους από την αρχή των αξόνων.

Τα πιο **συνηθισμένα μέτρα** που χρησιμοποιούνται μόνο για ποσοτικές μεταβλητές είναι ο **αριθμητικός μέσος** ή **μέση τιμή** και η **διάμεσος**.

Α Μέση Τιμή σε διακριτή μεταβλητή

Έστω η μεταβλητή $\mathbf{X}$
με παρατηρήσεις τις $t_1, t_2, ..., t_\nu$
και τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$, $\kappa \le \nu$ με απόλυτες συχνότητες τις $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\kappa$
και σχετικές συχνότητες τις $f_1, f_2, ..., f_\kappa$

Ορίζουμε σαν **μέση τιμή** αυτών

το πηλίκο $$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i = \frac{1}{\nu}\Sigma t_i = \frac{\Sigma t}{\nu}$$

Ας προσέξουμε και

την πιο κάτω χρήσιμη έκφραση με τη βοήθεια των τιμών και των συχνοτήτων τους.

Είναι $$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + ... + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i\frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i \; , \; \kappa \le \nu$$

Ένας **καθηγητής** για να συγκρίνει δύο διαφορετικά τμήματα **A** και **B** της ίδιας τάξης, ως προς την επίδοσή τους σε ένα μάθημα, πήρε τυχαία **10 μαθητές** από κάθε τμήμα.

Η βαθμολογία τους στο μάθημα αυτό ήταν:

Τμήμα **A** :	**15**	**15**	**15**	**15**	**14**	**14**	**15**	**15**	**15**	**15**
Τμήμα **B** :	**8**	**10**	**10**	**10**	**14**	**16**	**20**	**20**	**20**	**20**

Η **μέση τιμή** των βαθμών στο τμήμα **A**
με βαθμούς: **15 , 15 , 15 , 15 , 14 , 14 , 15 , 15 , 15 , 15**

είναι $\bar{x}_A = \dfrac{15+15+15+15+14+14+15+15+15+15}{10} = 14{,}8$

Μπορούμε και με τον τύπο $\bar{x}_A = \dfrac{8\cdot 15 + 2\cdot 14}{10} = 14{,}8$

Η **μέση τιμή** των βαθμών στο τμήμα **B**
με βαθμούς: **8 , 10 , 10 , 10 , 14 , 16 , 20 , 20 , 20 , 20**

είναι $\bar{x}_B = \dfrac{8+10+10+10+14+16+20+20+20+20}{10} = 14{,}8$

Μπορούμε και με τον τύπο $\bar{x}_B = \dfrac{1\cdot 8 + 3\cdot 10 + 1\cdot 14 + 1\cdot 16 + 4\cdot 20}{10} = 14{,}8$

Παρατηρούμε ότι η **βαθμολογία** και των δύο τμημάτων είναι συγκεντρωμένη γύρω από στο **15**
και το δεύτερο τμήμα παρουσιάζει **μεγαλύτερη διασπορά** βαθμών από το πρώτο.
Δηλαδή οι βαθμοί του **B′** τμήματος είναι περισσότερο **διασκορπισμένοι** γύρω από μια **κεντρική τιμή**, σε σχέση με τους βαθμούς του **A′** τμήματος.

Η μέση τιμή από μόνη της δεν δίνει και σημαντικές πληροφορίες αφού δύο δείγματα με τον ίδιο μέσο όρο, μπορεί να συμπεριφέρονται διαφορετικά.

Έστω ο διπλανός **πίνακας συχνοτήτων** που δίνει την **κατανομή** του **χρόνου t** (σε sec) **40 μαθητών** που χρειάστηκαν για να **τρέξουν** μια δεδομένη απόσταση.
Να αποδείξετε ότι η **μέση τιμή** των παρατηρήσεων είναι **27,25**

x_i	v_i
10	15
20	10
40	5
50	6
60	4

Β📖 Σταθμικός μέσος

Στις περιπτώσεις
που δίνεται διαφορετική **βαρύτητα** ή **έμφαση** στις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$
αντί της μέσης τιμής
χρησιμοποιούμε το **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο ή σταθμικό μέσο**.

Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, δώσουμε διαφορετική βαρύτητα
που εκφράζεται με τους λεγόμενους **συντελεστές βαρύτητας** $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$
τότε ο **σταθμικός μέσος**

βρίσκεται από τον τύπο $$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$$

🔔 Έστω ο υποψήφιος μαθητής του πιο κάτω παραδείγματος.

Γενικός Βαθμός πρόσβασης	18,2	18,2 x 8 = 145,6
Μαθηματικά Κατεύθυνσης 1° Μάθημα αυξημένης βαρύτητας	17	17 x 1,3 = 22,1
Μαθηματικά Γενικής παιδείας 2° Μάθημα αυξημένης βαρύτητας	18	18 x 0,7 = 12,6
Τελικός Μέσος όρος 145,6 + 22,1 + 12,6 = 180,3	180,3 x 100 = 18.030	

Είναι $x_1 = 18{,}2$ και $w_1 = 8$, οπότε $x_1 w_1 = 145{,}6$

$x_2 = 17$ και $w_2 = 1{,}3$, οπότε $x_2 w_2 = 22{,}1$

$x_3 = 18$ και $w_3 = 0{,}7$, οπότε $x_3 w_3 = 12{,}6$

Ο σταθμικός μέσος είναι $\bar{x} = \dfrac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3}{w_1 + w_2 + w_3} = \dfrac{145{,}6 + 22{,}1 + 12{,}6}{8 + 1{,}3 + 0{,}7} = \dfrac{180{,}3}{10} = \mathbf{18{,}03}$

✍ Να βρείτε το **σταθμικό μέσο** ενός μαθητή με βαθμό πρόσβασης **18**

πρώτο μάθημα βαρύτητας, βαθμού **18** και δεύτερο μάθημα βαρύτητας, βαθμού **20**

Γ Μέση Τιμή σε συνεχή μεταβλητή

Για να βρούμε τη μέση τιμή σε ομαδοποιημένα δεδομένα, χρησιμοποιούμε σαν τιμές, τις κεντρικές τιμές.

Έστω ο παρακάτω πίνακας που δείχνει το **ύψος** σε **cm** μιας ομάδας παιδιών.

101	101	104	108	109	110	110	112	114	114
115	117	118	119	117	114	112	116	116	112
121	122	122	124	124	123	127	127	128	129
122	125	125	125	128	128	128	128	127	122
124	124	124	122	123	130	131	132	133	139

Η **μέση τιμή** των πιο πάνω παρατηρήσεων

είναι $\bar{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{50}}{50} = \dfrac{101 + 101 + 104 + \ldots + 139}{50} = \dfrac{6026}{50} = 120{,}52$

Για ευκολότερο όμως υπολογισμό
ομαδοποιούμε τα δεδομένα για παράδειγμα σε 4 ισοπλατείς κλάσεις όπως φαίνεται πιο κάτω.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	$v_i\ x_i$
[100 , 110)	105	5	525
[110 , 120)	115	15	1725
[120 , 130)	125	25	3125
[130 , 140)	135	5	675
		50	6050

Η **μέση τιμή** θα είναι $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v} = \dfrac{525 + 1725 + 3125 + 675}{50} = \dfrac{6050}{50} = 121\text{cm}$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μέσες τιμές που βρήκαμε διαφέρουν μεταξύ τους.
Η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την ομαδοποίηση, υποθέσαμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι **ομοιόμορφα κατανεμημένες** και ότι οι τιμές σε κάθε κλάση **εκπροσωπούνται** από την αντίστοιχη κεντρική τιμή x_i
Αυτό φυσικά σημαίνει απώλεια πληροφοριών, αλλά απλούστευση διαδικασιών.

Να βρείτε το **μέσο όρο** των βαθμών ενός τμήματος με επιδόσεις
9 , **7** , **1** , **12** , **13** , **10** , **6** , **12** , **12** , **13** , **10** , **10** , **16** , **12** , **13** , **3** , **10** , **17** , **12** , **18**
αν ομαδοποιήσουμε τα δεδομένα στις κλάσεις **[0,10)** και **[10,20)**

Να παρατηρήσουμε ότι πιο πάνω, θα ήταν καλύτερα να ομαδοποιήσουμε στις κλάσεις **(0,10]** και **(10,20]** ,αν θέλαμε οπωσδήποτε αυτά τα άκρα στην ομαδοποίηση γιατί το **0** **δεν** αποτελεί βαθμό, αφού τότε το **20** , **δεν** θα υπήρχε στην **20** -βάθμια κλίμακα.

Δ📖 Διάμεσος σε διακριτή μεταβλητή

Η διάμεσος, είναι ένα ακόμα μέτρο θέσης, το οποίο μας δείχνει μία «μέση τιμή» του «κέντρου των παρατηρήσεων» και είναι ανεξάρτητη από τα άκρα.

Διάμεσο ενός δείγματος **ν** παρατηρήσεων
οι οποίες έχουν διαταχθεί σε **αύξουσα σειρά**
ορίζεται ως η **μεσαία παρατήρηση**, όταν το **ν** είναι **περιττός** αριθμός
ή το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το **ν** είναι **άρτιος** αριθμός.

Έστω οι **13** παρατηρήσεις: **3 4 0 6 5 8 1 1 6 1 2 8 9**

Αυτές σε αύξουσα σειρά είναι: 0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9

Η διάμεσος είναι η έβδομη παρατήρηση (μεσαία παρατήρηση), δηλαδή το $\delta = 4$

Να τονίσουμε ότι η **μεσαία** παρατήρηση σε δείγμα **περιττού** μεγέθους **ν** είναι η $t_{\frac{\nu+1}{2}}$ και μάλιστα η **διάμεσος** είναι **τιμή** του δείγματος.

Έστω οι παρατηρήσεις: **1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 4, 3, 2, 1, 1**

Να βρείτε τη διάμεσο παρατήρηση.

Έστω οι **14** παρατηρήσεις: **3 4 0 6 5 8 1 1 6 1 2 8 9 9**

Αυτές σε αύξουσα σειρά είναι: 0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9 9

Οπότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων

δηλαδή της έβδομης και όγδοης παρατήρησης, δηλαδή είναι η $\delta = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$

Να τονίσουμε ότι η **μεσαίες** παρατηρήσεις σε δείγμα **άρτιου** μεγέθους **ν** είναι οι: $t_{\frac{\nu}{2}}$, $t_{1+\frac{\nu}{2}}$, αλλά όμως η **διάμεσος δεν** είναι πάντα **τιμή** του δείγματος.

Έστω οι παρατηρήσεις: **1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 4, 3, 2, 1, 1, 1**

Να βρείτε τη διάμεσο παρατήρηση.

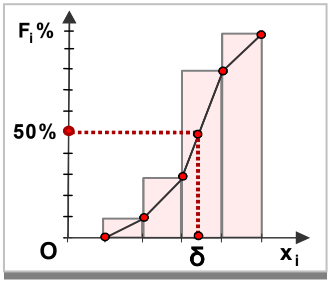
Η διάμεσος, είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σχεδόν σε **δύο ίσα μέρη**, όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους.

Συγκεκριμένα, η διάμεσος είναι εκείνος ο αριθμός
για τον οποίο **το πολύ 50%** των **παρατηρήσεων** είναι **μικρότερες** από αυτόν
και **το πολύ 50%** των **παρατηρήσεων** είναι **μεγαλύτερες** από αυτόν.

Η διάμεσος **δεν επηρεάζεται** από τις ακραίες παρατηρήσεις, αν οι παρατηρήσεις αυτές είναι προφανώς περισσότερες από 2

Ε📖 Διάμεσος σε συνεχή μεταβλητή

Για βρούμε τη διάμεσο σε ομαδοποιημένα δεδομένα
από το σημείο εκείνο του άξονα **Oy** των
εκατοστιαίων αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων
που είναι το **50%** των **παρατηρήσεων**
φέρουμε την **κάθετη** σ'αυτόν
μέχρι να **τμήσουμε** το πολύγωνο συχνοτήτων
και από κει, την **κάθετη** στον άξονα **Ox**
και βρίσκουμε τελικά τον διάμεσο αριθμό **δ**

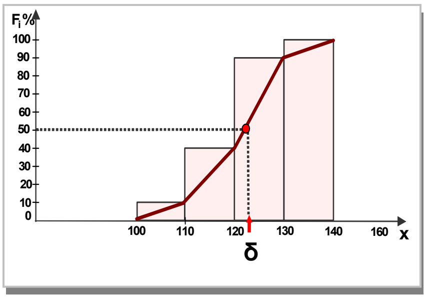


Να παρατηρήσουμε ότι και εδώ
το **50%** των **παρατηρήσεων** είναι **μικρότερες ή ίσες** από αυτήν
και το **50%** των **παρατηρήσεων** είναι **μεγαλύτερες ή ίσες** από την τιμή αυτήν.

🔔 Θεωρούμε ξανά τα δεδομένα του **ύψους** των μαθητών στον πιο κάτω πίνακα.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητες v_i	Σχετικές Συχνότητες f_i	Σχετικές Συχνότητες $f_i\%$	Αθροιστικές Σχετικές Συχνότητες $F_i\%$
[100 , 110)	**105**	**5**	**0,1**	**10**	**10**
[110 , 120)	**115**	**15**	**0,3**	**30**	**40**
[120 , 130)	**125**	**25**	**0,5**	**50**	**90**
[130 , 140)	**135**	**5**	**0,1**	**10**	**100**
		50	**1**	**100**	

Ακολουθώντας
την προηγούμενη διαδικασία
βρίσκουμε ότι η διάμεσος **δ**
είναι ανάμεσα στο διάστημα **[120,130)**
Περίπου θα λέγαμε ότι είναι **δ ≅ 123**



Αργότερα, με τη βοήθεια των αναλογιών θα εντοπίσουμε ακριβέστερα αυτή.

✍ Αν στον παραπάνω πίνακα κατανομής, από **λάθος** το όργανο μέτρησης έδειχνε **10 cm** λιγότερο, να βρείτε την **πραγματική διάμεσο**.

Μεθοδολογία

α Μέση τιμή σε διακριτές μεταβλητές

Εδώ γίνεται απλή εφαρμογή τύπων.

Ας δούμε τα πιο κάτω θέματα.

Θέμα 1

Αν η **μέση τιμή** **100** παρατηρήσεων $\mathbf{t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_{100}}$ είναι **21,5**
και η **μέση τιμή** των **30** **μικρότερων** παρατηρήσεων είναι **18**
να αποδείξετε ότι η **μέση τιμή** των **υπολοίπων** είναι **23**

Απάντηση

Από $\bar{x}_{100} = 21{,}5$, είναι $\dfrac{\sum_{i=1}^{100} t_i}{100} = 21{,}5$ ή $\sum_{i=1}^{100} t_i = 2150$

και από $\bar{x}_{30} = 18$, είναι $\dfrac{\sum_{i=1}^{30} t_i}{30} = 18$ ή $\sum_{i=1}^{30} t_i = 540$

Οπότε $\mathbf{\bar{x}_{70}} = \dfrac{\sum_{i=31}^{100} t_i}{70} = \dfrac{\sum_{i=1}^{100} t_i - \sum_{i=1}^{30} t_i}{70} = \dfrac{2150-540}{70} = \mathbf{23}$

Θέμα 2

Έστω $\mathbf{x_1 = 1}$, $\mathbf{x_2 = 2}$, $\mathbf{x_3 = 3}$, $\mathbf{x_4 = 4}$, $\mathbf{x_5 = 5}$ οι **τιμές** μιας μεταβλητής **X**

σε ένα δείγμα μεγέθους **ν** με **μέση τιμή** την $\mathbf{\bar{x} = 3}$

Οι συχνότητες $\mathbf{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}$ των $\mathbf{x_1, x_2, x_3, x_4}$ είναι **ίσες** με $\mathbf{\nu_i = 2i}$, $\mathbf{i = 1,2,3,4}$

Θα βρούμε τη συχνότητα $\mathbf{\nu_5}$

Απάντηση

Επειδή $\nu_1 = 2, \nu_2 = 4, \nu_3 = 6$ και $\nu_4 = 8$, είναι $\mathbf{\nu} = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \mathbf{20 + \nu_5}$

Επειδή $\mathbf{\bar{x} = 3}$

είναι $\dfrac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 + \nu_4 x_4 + \nu_5 x_5}{\nu} = 3$ ή $\dfrac{2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 6\cdot 3 + 8\cdot 4 + 5\cdot \nu_5}{20+\nu_5} = 3$

ή $2 + 8 + 18 + 32 + 5\cdot\nu_5 = 3(20+\nu_5)$ ή $60 + 5\cdot\nu_5 = 60 + 3\nu_5$ ή $\mathbf{\nu_5 = 0}$

Να τονίσουμε ότι βολεύουν οι τύποι με τις τιμές $\mathbf{x_i}$ και όχι με τις παρατηρήσεις $\mathbf{t_i}$

Θέμα 3

Έστω $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ οι **τιμές** μιας μεταβλητής X σε ένα δείγμα.
Αν ξέρουμε ότι $f_1\% = 20\%$ και $f_2\% = 40\%$, θα βρούμε τη **μέση τιμή** αυτών.

Απάντηση

Είναι $f_1\% = 20\%$ ή $f_1 = 0{,}2$ και $f_2\% = 40\%$ ή $f_2 = 0{,}4$
Συνεπώς για τη σχετική συχνότητα f_3 είναι $f_3 = 1 - 0{,}2 - 0{,}4 = 0{,}4$

Οπότε $\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i f_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}4 = \mathbf{2{,}2}$

Θέμα 4

Σε μια **κάλπη** υπάρχουν **Άσπρες** , **Μαύρες** , **Κόκκινες** και **Πράσινες** σφαίρες σε αναλογία **10 %** , **20** % , **30 %** και **40 %** αντίστοιχα.
Το βάρος κάθε **Άσπρης** είναι **10** gr κάθε **Μαύρης 11** gr , κάθε **Κόκκινης 12** gr και κάθε **Πράσινης 13** gr
Θα βρούμε τη **μέση τιμή** του βάρους όλων των σφαιρών
αν στην κάλπη υπάρχουν α) **10** σφαίρες β) **δεν γνωρίζουμε** τον αριθμό τους.

Απάντηση

α) **Άσπρες**: $\frac{10}{100}10 = 1$

Μαύρες: $\frac{20}{100}10 = 2$

Κόκκινες: $\frac{30}{100}10 = 3$

Πράσινες: $\frac{40}{100}10 = 4$

Είναι $\bar{x} = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 13}{10} = \mathbf{12gr}$

β) **Άσπρες**: $0{,}1x$
Μαύρες: $0{,}2x$
Κόκκινες: $0{,}3x$
Πράσινες: $0{,}4x$

Έστω x ο αριθμός των σφαιρών.

Είναι $\bar{x} = \frac{0{,}1 \cdot x \cdot 10 + 0{,}2 \cdot x \cdot 11 + 0{,}3 \cdot x \cdot 12 + 0{,}4 \cdot x \cdot 13}{x} = \frac{x \cdot (1 + 2{,}2 + 3{,}6 + 5{,}2)}{x} = \mathbf{12\ gr}$

Ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, γιατί οι συχνότητες είναι φυσικοί αριθμοί.

Ασκήσεις

α.1 ▢ Στις παρατηρήσεις: **0** , **0** , **0** , **1** , **0** , **0** , **0** , η **μέση τιμή** είναι η τιμή **1**

α.2 ● Η βαθμολογία **10** μαθητών σε **Τεστ** ήταν: **7, 11, 10, 13, 15, 3, 12, 11, 4, 14**

Να υπολογίσετε τη **μέση τιμή** τους.

α.3 ● Να βρείτε τη **μέση τιμή** των παρατηρήσεων $\mathbf{1}$, $\mathbf{2-\alpha}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{-3}$, $\mathbf{3+\alpha}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{0}$

α.4 ● Από **5** παρατηρήσεις, η **μέση τιμή** των **4** εξ' αυτών είναι **2,5**

Αν η **5**$^{\eta}$ παρατήρηση είναι **5**, να βρείτε τη **μέση τιμή** και των **5** παρατηρήσεων.

α.5 ● Η **μέση** ηλικία **18 αγοριών** και **12 κοριτσιών** μιας τάξης είναι **15,4** χρόνια.

Αν η **μέση ηλικία** των **αγοριών** είναι **15,8 χρόνια**, να βρείτε τη **μέση ηλικία** των **κοριτσιών**.

α.6 ● Οι **θερμοκρασίες** σε βαθμούς Κελσίου **°C** **5** ημερών μιας πόλης
τον μήνα Ιανουάριο ήταν $\mathbf{-12}$, $\mathbf{-11}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{-8}$ και $\boldsymbol{\beta}$
Αν η **μέση τιμή** τους είναι $\mathbf{-10}$ και η διαφορά του $\boldsymbol{\beta}$ από το $\boldsymbol{\alpha}$ είναι **1°C**
να αποδείξετε ότι $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{-10}$ και $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{-9}$

α.7 ● Έστω οι παρακάτω **κατανομές συχνοτήτων**.

Α

x_i	f_i
2	0,1
3	0,5
4	0,4

Β

x_i	$f_i\%$
10	40
15	30
20	30

Γ

x_i	ν_i
100	5
110	20
120	25

Δ

x_i	ν_i
1	15
2	0
3	35

Να βρείτε τη **μέση τιμή**.

α.8 ● Στους παρακάτω πίνακες να βρείτε τις συχνότητες που λείπουν.

Α

x_i	ν_i
–2	10
–1	α
0	8
1	10

Β

x_i	f_i
10	0,2
20	α
30	0,2
40	β

αν για την πρώτη κατανομή **Α** γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της είναι **–0,5**

αν για την δεύτερη κατανομή **Β** γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της είναι **30**

α.9● Το **μέσο ύψος** $\mathbf{9}$ καλαθοσφαιριστών μιας ομάδας είναι **205 cm**

α) Αν για να "**ψηλώσει**" ο προπονητής την ομάδα «**πάρει**» έναν ακόμη παίκτη με ύψος **216 cm**, να βρείτε το **μέσο ύψος** της **ομάδας** τώρα.

β) Αν ήθελε να "**ψηλώσει**" την ομάδα στα **208 cm**, πόσο ύψος έπρεπε να έχει ο καλαθοσφαιριστής που πήρε;

α.10● Σε ένα δοχείο υπάρχουν **Ά**σπρες , **Μ**αύρες και **Γ**κρι σφαίρες.

Το **10%** είναι **Ά**σπρες, το **40%** είναι **Μ**αύρες και οι **υπόλοιπες** είναι **Γ**κρι.

Το βάρος κάθε **Άσπρης** σφαίρας είναι **10** gr, κάθε **Μαύρης** σφαίρας είναι **40** gr

Αν το **μέσο βάρος** όλων των σφαιρών είναι **67** gr, δείξτε ότι κάθε **Γκρι** σφαίρα ζυγίζει **100** gr

α.11● Οι **τιμές** μιας μεταβλητής $\mathbf{X}$ σε ένα δείγμα

είναι: $\mathbf{x_1 = 1}$, $\mathbf{x_2 = 2}$, $\mathbf{x_3 = 3}$, $\mathbf{x_4 = 4}$ και $\mathbf{x_5 = 5}$, ώστε για τις σχετικές συχνότητες αυτών να είναι: $\mathbf{15f_1 = 1}$, $\mathbf{15f_2 = 2}$, $\mathbf{5f_3 = 1}$, $\mathbf{15f_4 = 4}$, $\mathbf{3f_5 = 1}$

α) Να βρείτε τη **μέση τιμή** $\bar{\mathbf{x}}$

β) Αν ισχύει η σχέση $\sum\limits_{i=1}^{5} \mathbf{x_i v_i = 55}$, να βρείτε τις $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$, $\mathbf{v_4}$ και $\mathbf{v_5}$

α.12● Έστω το δείγμα μεγέθους $\mathbf{v \neq 0}$ και με **μέση τιμή** των παρατηρήσεων $\bar{\mathbf{x}}$ ώστε $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{10} - \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{v^2}$

Να αποδείξετε πρώτα ότι $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{(0,10)}$ και $\mathbf{v} \in \mathbf{[1,5]}$

Αν τώρα ο $\mathbf{v}$ πάρει τη **μεγαλύτερη τιμή** του, να αποδείξετε ότι $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{5}$

α.13● Το **διαγώνισμα** της **Στατιστικής** που έβαλε στην Τρίτη τάξη ο καθηγητής των **Μαθηματικών** σε **100** μαθητές, παρουσίασε **μέση βαθμολογία 7**

Επειδή όμως κανένας **δεν έγραψε** πάνω από **8** , για να «βοηθήσει» τους μαθητές του έκανε δύο σκέψεις.

- Να **προσθέσει 2** μονάδες στο βαθμό κάθε γραπτού.
- Να **αυξήσει** τη βαθμολογία κάθε γραπτού κατά **20%**

Με ποια από τις δύο παραπάνω σκέψεις, ο καθηγητής θα «**βοηθήσει**» πιο πολύ τους μαθητές του ;

α.14● Η **επίδοση** ενός μαθητή σε **πέντε** μαθήματα είναι: **12** , **10** , **16** , **18** , **14**

α) Να βρείτε τη ***μέση επίδοση*** του μαθητή.

β) Αν τα μαθήματα είχαν ***συντελεστές στάθμισης*** **2** , **3** , **1** , **1** και **3**
ποια θα ήταν η ***μέση επίδοση*** του;

α.15● Οι **60** μαθητές της **Γ΄** τάξης ενός σχολείου έγραψαν **δύο διαγωνίσματα**.

- Στο **πρώτο διαγώνισμα**, η **μέση βαθμολογία** ήταν **13**
- Στο **δεύτερο διαγώνισμα**, **40** μαθητές έγραψαν κατά **4** μονάδες **καλύτερα**

10 μαθητές κατά **1** μονάδα **χειρότερα** και οι **υπόλοιποι** πήραν τον **ίδιο βαθμό**.
Να βρείτε τη **μέση βαθμολογία** στο **δεύτερο διαγώνισμα**.

α.16● Θεωρούμε **δείγμα** μεγέθους $\mathbf{v}$ με παρατηρήσεις τις $\mathbf{t_1, t_2, \dots, t_\lambda}$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\mathbf{f(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + \dots + (t_\lambda - x)^2}$

α) Να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ έχει **ελάχιστο** στη θέση της ***μέσης τιμής***.

β) Αν τώρα η **τιμή** του **ελαχίστου** ισούται με $\mathbf{0}$, τότε $\mathbf{t_1 = t_2 = \dots = t_\lambda = \bar{x}}$

α.17● Έστω οι παρατηρήσεις $\mathbf{t_i}$, $\mathbf{i = 1,2,\dots,100}$ ενός δείγματος μίας μεταβλητής $\mathbf{X}$
ώστε $\mathbf{t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{100}}$, οι οποίες έχουν **μέση τιμή** $\mathbf{\bar{x} = 1}$

Αν $\mathbf{\sum_{i=1}^{40} t_i = \sum_{i=41}^{100} t_i}$, αποδείξτε ότι η **μέση τιμή** των $\mathbf{t_1 < t_2 < \dots < t_{40}}$ είναι ίση με **1,25**

α.18● Θεωρούμε **δείγμα** μεγέθους $\mathbf{v}$ με παρατηρήσεις τις $\mathbf{t_1 \le t_2 \le \dots \le t_v}$

$α_1$) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\bar{x} \in [t_1, t_v]}$ …Πότε είναι $\mathbf{\bar{x} = t_1}$ ή $\mathbf{\bar{x} = t_v}$;

$α_2$) Αν οι παρατηρήσεις είναι **φυσικοί αριθμοί**, αποδείξτε ότι $\mathbf{\bar{x} \in Q}$

Για κάθε **τιμή** $\mathbf{x_\kappa}$ της μεταβλητής $\mathbf{X}$ είναι $\mathbf{x_\kappa^3 - 3x_\kappa^2 + 2x_\kappa = 0}$

$β_1$) Να αποδείξετε ότι αυτές οι τιμές είναι **μόνο 3** και να τις **βρείτε**.

$β_2$) Να αποδείξετε ότι για τη **μέση τιμή** τους $\mathbf{\bar{x}}$ είναι $\mathbf{\bar{x}^2 - (3 + \sqrt{2})\bar{x} + 3\sqrt{2} \ne 0}$

β Μέση τιμή σε συνεχείς μεταβλητές

Στην ουσία εδώ, βρίσκουμε τις κεντρικές τιμές και αναγόμαστε στην εύρεση μέσης τιμής σε διακριτή μεταβλητή.

Θέμα 1

Ο διπλανός πίνακας δείχνει το **μήκος** σε **cm** μιας ομάδας αντικειμένων όπου **λείπει** η συχνότητα $\mathbf{v_4}$ της **τέταρτης κλάσης**

Κλάσεις [-)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
[0,10)	$x_1 = 5$	$v_1 = 5$	25
[10,20)	$x_2 = 15$	$v_2 = 15$	225
[20,30)	$x_3 = 25$	$v_3 = 25$	625
[30,40)	$x_4 = 35$	v_4	$35v_4$

Αν η **μέση τιμή** είναι **21**, θα προσδιορίσουμε την $\mathbf{v_4}$

Απάντηση

Από $\mathbf{21} = \bar{\mathbf{x}} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v} = \dfrac{25+225+625+35\cdot v_4}{v_4+45}$, τελικά βρίσκουμε $\mathbf{v_4 = 5}$ **cm**

Θέμα 2

Ο διπλανός πίνακας δίνει το **βαθμό** στα μαθηματικά των μαθητών μίας τάξης της **Γ΄** Λυκείου.

Θα υπολογίσουμε τη **μέση τιμή** τους.

Βαθμός	f_i
[0,4)	0,20
[4,8)	0,30
[8,12)	0,25
[12,16)	0,15
[16,20)	0,10

Απάντηση

Βαθμός	Κέντρο Κλάσης	f_i	$x_i f_i$
[0,4)	2	0,20	0,40
[4,8)	6	0,30	1,80
[8,12)	10	0,25	2,50
[12,16)	14	0,15	2,10
[16,20)	18	0,10	1,80
Σύνολο		1,00	

Με βάση τιμές τις **κεντρικές τιμές**, η **μέση τιμή** υπολογίζεται απλά και είναι ίση

με $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 + x_5f_5 = 0{,}40 + 1{,}80 + 2{,}50 + 2{,}1 + 1{,}80 = \mathbf{8{,}6}$

Ασκήσεις

β.1● Έστω οι πιο κάτω βαθμοί **20** μαθητών.

1 , 2 , 5 , 10 , 20 , 20 , 10 , 15 , 15 , 15 , 15 , 18 , 19 , 12 , 5 , 12 , 15 , 17 , 14 , 20

Να **ομαδοποιήσετε** τα πιο πάνω δεδομένα σε **4** κλάσεις ίσου πλάτους τις **(0,5]** , **(5,10]** , **(10,15]** και **(15,20]**

Να βρείτε τη **μέση βαθμολογία** με βάση την ομαδοποίηση.

β.2● Να υπολογίσετε τη **μέση τιμή** στη διπλανές ομαδοποιημένες κατανομές.

Α

Βαθμός	v_i
[1,5)	100
[5,9)	300
[9,13)	100

Β

Βαθμός	f_i %
[0,5)	25
[5,10)	45
[10,15)	30

β.3● Η **βαθμολογία 50 φοιτητών** στις εξετάσεις ενός μαθήματος είναι:

3	4	5	8	9	7	6	8	7	10
8	7	6	5	9	3	8	5	6	6
6	3	5	6	4	2	9	8	7	7
1	6	3	1	5	8	1	2	3	4
5	6	7	9	10	9	8	7	6	5

Να **ομαδοποιήσετε** τα πιο πάνω δεδομένα σε **5 κλάσεις ίσου πλάτους**, ώστε η **κεντρική τιμή** της **πρώτης κλάσης** να ισούται με **2**

Να βρείτε τη **μέση βαθμολογία** με βάση την ομαδοποίηση.

β.4● Έστω η διπλανή **ομαδοποιημένη κατανομή** μεγέθους **100**
Γνωρίζουμε ότι η ευθεία $(\varepsilon): x = 6$
χωρίζει το χωρίο που σχηματίζεται
από το **πολύγωνο συχνοτήτων** και τον άξονα $x'x$
σε δύο **ισεμβαδικά χωρία**.
α) Να αποδείξετε ότι $v_2 = 20$ και $v_4 = 30$
β) Να υπολογίσετε τη **μέση τιμή**.

Βαθμός	v_i
[0,4)	40
[4,8)	v_2
[8,12)	10
[12,16)	v_4

β.5● Έστω η διπλανή **ομαδοποιημένη κατανομή**.
Γνωρίζουμε ότι το **μέγεθος** είναι $v = 100$
και η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 250$
α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 40$ και $\beta = 30$
β) Αν θέλουμε η μέση τιμή να γίνει $\bar{x} = 200$
να βρείτε πόσες παρατηρήσεις πρέπει να **αφαιρέσουμε** από την κλάση **[350,450)**

Βαθμός	v_i
[50,150)	20
[150,250)	α
[250,350)	10
[350,450)	β

β.6● Έστω ο διπλανός πίνακας.

Να **συμπληρώστε** τον πίνακα

και να υπολογίσετε τη **μέση τιμή** των παρατηρήσεων.

Κλάσεις [,)	x_i	f_i
3-5		0,1
5-7		0,2
7-9		0,3
9-11		
Σύνολο		1

β.7● Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους

το **πολύγωνο των εκατοστιαίων σχετικών συχνοτήτων** $f_i\%$

έχει **διαδοχικές κορυφές**, τις **Α(–3,0)** , **Β(3,10)** , **Γ(9,20)** , **Δ(15,$y_Δ$)** , **Ε(21,40)**

και **Δ(27,0)**

Η **μέση τιμή** της κατανομής είναι $\bar{x} = 15$

α) Να αποδείξετε ότι οι κλάσεις της κατανομής είναι οι **[0,6)** , **[6,12)** , **[12,18)**

και **[18,24)**

β) Να βρείτε την τεταγμένη του **Δ**

β.8● Η βαθμολογία **50 μαθητών** στην Ιστορία κυμαίνεται από **10** μέχρι **20**

και κανένας **δεν** είναι «**κάτω»** από τη **βάση**.

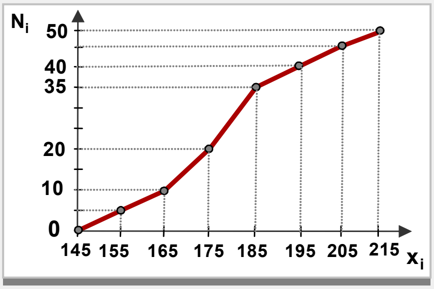
5 μαθητές έχουν βαθμό **κάτω** από **12** , **15** μαθητές **κάτω** από **14** , **5** μαθητές

μεγαλύτερο ή ίσο του **18** και **15** μαθητές **μεγαλύτερο ή ίσο του 16**

Να υπολογίσετε τη **μέση βαθμολογία**.

β.9● Σε ένα **σχολείο**
πραγματοποιήθηκε μία έρευνα
για το **ύψος** των μαθητών
αλλά τα δεδομένα «χάθηκαν»
και βρέθηκε μόνο το **πολύγωνο**
των **αθροιστικών συχνοτήτων**.

Να βρείτε το **μέσο ύψος** των μαθητών.



γ Διάμεσος σε διακριτές μεταβλητές

Να προσέχουμε να διατάσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

Θέμα 1

Έστω η **γνήσια φθίνουσα** και **περιττή** στο **R** συνάρτηση **f**

Θα προσδιορίσουμε τη **διάμεσο** των $\mathbf{f(-3)}$, $\mathbf{f(-2)}$, $\mathbf{f(-1)}$, $\mathbf{f(0)}$, $\mathbf{f(1)}$, $\mathbf{f(2)}$, $\mathbf{f(3)}$

Απάντηση

Επειδή η **f** είναι γνήσια φθίνουσα, από $-3<-2<-1<0<1<2<3$

είναι και $f(-3) > f(-2) > f(-1) > f(0) > f(1) > f(2) > f(3)$

ή $f(3) < f(2) < f(1) < f(0) < f(-1) < f(-2) < f(-3)$

Οπότε αφού έχουμε **7** παρατηρήσεις, η διάμεσος είναι $\mathbf{\delta = f(0) = 0}$

Να θυμηθούμε ότι για κάθε **περιττή** στο R συνάρτηση f είναι f(0)=0, αφού από f(-x)=-f(x) και για x=0, προκύπτει f(0)=-f(0) ή f(0)=0

Θέμα 2

Θα βρούμε το **διάμεσο** αριθμό, των αριθμών **4,8,12,16,...,116,120**

Απάντηση

Ας δούμε πρώτα ποιο είναι το πλήθος των αριθμών.

Πρόκειται για διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\mathbf{\alpha_1 = 4}$ και $\mathbf{\omega = 4}$

Από $\mathbf{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega}$ είναι $\mathbf{120 = 4 + (\nu-1)4}$ ή $\mathbf{116 = 4(\nu-1)}$ ή $\mathbf{\nu = 30}$

Οπότε πρόκειται για **άρτιο πλήθος** παρατηρήσεων

Δηλαδή $\mathbf{\delta} = \dfrac{\alpha_{15}+\alpha_{16}}{2} = \dfrac{(\alpha_1+14\omega)+(\alpha_1+15\omega)}{2} = \dfrac{(4+56)+(4+66)}{2} = \dfrac{60+64}{2} = \mathbf{62}$

Θέμα 3

Σε μια **κάλπη** υπάρχουν **Άσπρες , Μαύρες , Κόκκινες** και **Πράσινες** σφαίρες σε αναλογία **10 %** , **20 %** , **30 %** και **40 %** αντίστοιχα.

Το βάρος κάθε **Άσπρης** είναι **10** gr, κάθε **Μαύρης** **11** gr ,κάθε **Κόκκινης** **12** gr και κάθε **Πράσινης** είναι **13** gr

Θα βρούμε το **διάμεσο βάρος** όλων των σφαιρών.

Απάντηση

Έστω $\mathbf{x = 10\alpha}$ ο αριθμός των σφαιρών, προφανώς πολλαπλάσιο του **10**

Είναι: Άσπρες: $\mathbf{0{,}1x = \alpha}$ Μαύρες: $\mathbf{0{,}2x = 2\alpha}$ Κόκκινες: $\mathbf{0{,}3x = 3\alpha}$ Πράσινες: $\mathbf{0{,}4x = 4\alpha}$

Το **Πλήθος** είναι ίσο με **10x** και είναι $\overbrace{\mathbf{10,10,\ldots,10}}^{\alpha}, \overbrace{\mathbf{11,11,\ldots,11}}^{2\alpha}, \overbrace{\mathbf{12,12,\ldots,12}}^{3\alpha}, \overbrace{\mathbf{13,13,\ldots,13}}^{4\alpha}$

Οι δύο μεσαίες παρατηρήσεις είναι αυτές με αριθμό **5α** και $\mathbf{5\alpha+1}$, δηλαδή $\mathbf{\delta = 12}$

Ασκήσεις

γ.1 ▢ Στις παρατηρήσεις: **0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6** η **διάμεσος** είναι η τιμή **3**

γ.2 ▢ Σε ένα δείγμα η **διάμεσος** είναι μία **τιμή** της μεταβλητής.
Τότε είναι βέβαιο ότι **αποκλείεται** να έχουμε **2002** παρατηρήσεις.

γ.3 ▢ Αν σε μία **διακριτή** μεταβλητή, όλες οι **παρατηρήσεις** είναι **διαφορετικές** τότε η **διάμεσος δεν** είναι **βέβαιο** ότι ισούται με μία **παρατήρηση**.

γ.4 ▢ **Η διάμεσος δ** ενός δείγματος **2010** διαφορετικών παρατηρήσεων σε μία **ποσοτική διακριτή μεταβλητή**, είναι η **τιμή** που το **ποσοστό** των παρατηρήσεων που είναι **μικρότερες** ή **μεγαλύτερες** από **αυτήν** είναι **ακριβώς** το **50%** των **παρατηρήσεων**.

γ.5● Η **διάμεσος** πέντε αριθμών με άθροισμα **25** είναι **5**
Αν οι τρεις από αυτούς είναι οι αριθμοί **2** , **7** , **10** , να βρείτε τους άλλους δύο.

γ.6✷ Μία **κατανομή συχνοτήτων** παίρνει **τρεις** τιμές, τις **1** , **3** , **5**
και οι συχνότητες των τιμών **1** και **3** είναι **13** και **31** αντίστοιχα.
Αν η **διάμεσος** των παρατηρήσεων είναι **4** , τότε η **συχνότητα** της τιμής **5** είναι ίση με ☐**Α: 22** ☐**Β: 33** ☐**Γ: 44** ☐**Δ:** Τίποτα από τα προηγούμενα.

γ.7 ▢ Έστω ένα δείγμα στο οποίο εξετάζουμε τα **μήκη 101** εξαρτημάτων.
Αν η **διάμεσος** είναι $\delta = 10\,\text{cm}$, η **διάμεσος** των τετραγώνων θα είναι $\delta = 10^2\,\text{cm}^2$

γ.8● Να βρείτε τη **διάμεσο** των παρατηρήσεων, στις πιο κάτω περιπτώσεις.
● **1 , 10 , 2 , 15 , 3 , 12 , 5 , 5** ● ● **1 , 10 , 2 , 15 , 3 , 12 , 5 , 5 , 0**

γ.9● Να βρείτε τη **διάμεσο** των παρατηρήσεων στους παρακάτω πίνακες.

x_i	v_i
1	30
2	25
3	15
4	40

x_i	v_i
1	30
2	25
3	16
4	40

γ.10● Να βρείτε τη **διάμεσο** των παρατηρήσεων, στις πιο κάτω περιπτώσεις.
● **3 , 6 , 9 , 12 ,..., 300** ● ● **3 , 6 , 9 , 12 ,..., 300 ,303**

γ.11● Να βρείτε τις **τιμές** του $\kappa \in \{-2,-1,0\}$

ώστε η **διάμεσος** των αριθμών: κ , 2κ , $-\kappa^3$, $2\kappa^2$, $2\kappa^4$, $4\kappa^3$ να είναι **θετική**.

γ.12● Να αποδείξετε ότι η **διάμεσος** των αριθμών

$-\alpha^2-2$, $-\alpha^2-1$, 0 , α^2 , $\alpha^2-2\alpha+2$, 0.5 με $\alpha \in N^*$ είναι **σταθερή**.

γ.13● Στο διπλανό πίνακα, δίνονται οι **τιμές** μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.
Αν η **διάμεσος** είναι $2{,}5$, να **βρείτε** την τιμή του λ

Τιμές	Συχνότητες
1	10
2	15
3	λ
4	20

γ.14● Οι **παρατηρήσεις**

σε μία δειγματοληψία είναι: $x+\omega, x+2\omega, x+3\omega, x+4\omega, x+5\omega$, με $\omega>0$

Να αποδείξετε ότι η **διάμεσος** ταυτίζεται με την **μέση τιμή**.

γ.15● Έστω 8 **διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι**.

Αν αυτοί οι αριθμοί έχουν **μέση τιμή** 64 , να βρείτε τη **διάμεσο** τους.

γ.16● Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$, $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι **γνήσια αύξουσα** στο R

β) Να βρείτε τη **διάμεσο** των αριθμών $f(-x^2-2)$, $f(-x^2-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(x^2+1)$

γ.17● Έστω η μεταβλητή X , με παρατηρήσεις τις: $t_1<t_2<t_3<...<t_\nu$

και **τιμές** $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=6$ και $x_4=8$ …με **συχνότητες** $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$

Ξέρουμε ότι η **διάμεσος** είναι **περιττός** αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι ο φυσικός αριθμός ν είναι **άρτιος**.

β) Να αποδείξετε ότι $\delta^3-15\delta^2+71\delta-105=0$

γ) Αν $2\nu_1+2\nu_2>\nu$, αποδείξτε ότι $\delta=3$, όπως επίσης και $\nu_1=\nu_2+\nu_3+\nu_4$

γ.18● Σε έναν πίνακα παρουσιάζονται τα **ποσοστά** των απαντήσεων σχετικά με το **πόσες εφημερίδες** διαβάζουν 1000 άτομα την εβδομάδα.
Δεδομένου ότι **όλοι** διαβάζουν **τουλάχιστον** 1 εφημερίδα, κανένας **δεν διαβάζει πάνω** από 3 **εφημερίδες**, το 50% των ατόμων διαβάζει 1 **ή** 2 εφημερίδες και το 70% των ατόμων διαβάζει 1 **ή** 3 εφημερίδες, να υπολογίσετε τη **διάμεσο**.

δ Διάμεσος σε συνεχείς μεταβλητές

Για τον προσδιορισμό της διαμέσου σε ομαδοποιημένα δεδομένα συνήθως κατασκευάζουμε το πολύγωνο εκ. αθροιστικών σχ. συχνοτήτων.

Όμως ας προσέξουμε καλύτερα το πιο κάτω θέμα.

Θέμα 1

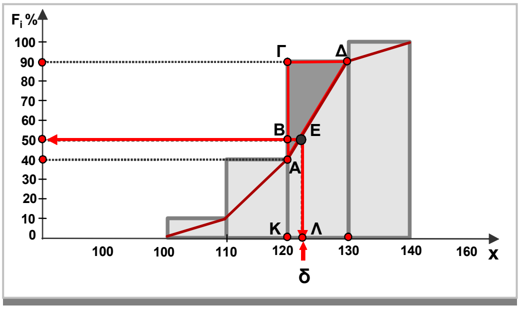
Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το **ύψος** σε **cm** μιας ομάδας παιδιών.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Εκ. Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Εκ. Αθροιστικές συχνότητες $F_i\%$
[100,110)	**105**	**5**	**0,1**	**10**	**10**
[110,120)	**115**	**15**	**0,3**	**30**	**40**
[120,130)	**125**	**25**	**0,5**	**50**	**90**
[130,140)	**135**	**5**	**0,1**	**10**	**100**
Σύνολο		**50**	**1**	**100**	

Θα βρούμε τη **διάμεσο** του ύψους των παιδιών.

Απάντηση

Κατασκευάζουμε το **πολύγωνο εκατοστιαίων αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων**.



Από το σημείο εκείνο του άξονα **Oy** των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων που είναι το **50 %** των παρατηρήσεων φέρουμε την κάθετη σ'αυτόν, μέχρι να τμήσουμε το πολύγωνο συχνοτήτων.

Από κει φέρνουμε την κάθετη στον άξονα **Ox**

Συγκρίνουμε τα **όμοια** τρίγωνα **ΑΓΔ** και **ΑΒΕ**

Είναι $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΓΔ}{ΒΕ} \Leftrightarrow \frac{90-40}{50-40} = \frac{130-120}{ΒΕ} \Leftrightarrow \frac{50}{10} = \frac{10}{ΒΕ} \Leftrightarrow ΒΕ = 2$

Οπότε **ΚΛ** $= 2$ και συνεπώς η **διάμεσος δ** ισούται με **δ** $= 120 + 2 = 122$

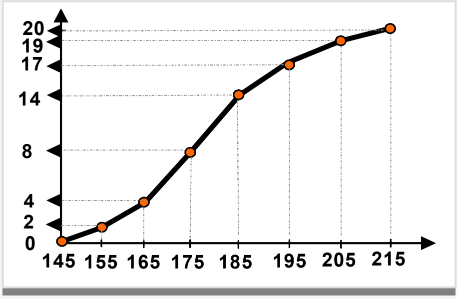
Θα μπορούσαμε όμως, να προσδιορίσουμε τη διάμεσο και από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων, όπου από το σημείο $\frac{v}{2}$ του **Oy**, επαναλαμβάνουμε με τα προηγούμενα.

Να θυμηθούμε ότι
είχαμε ξαναβρεί την ίδια διάμεσο προηγούμενα στη θεωρία με βάση τα σχήμα.

Να παρατηρήσουμε ότι τα πιο πάνω είναι προσεγγιστικά και έχουν νόημα θεωρώντας τις παρατηρήσεις ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στις κλάσεις. Η θεωρία των βέβαιων ψηφιών απουσιάζει από την έννοια των προσεγγίσεων και δεν έχει νόημα η «ακρίβεια» του αποτελέσματος.

Θέμα 2

Σε ένα **σχολείο** πραγματοποιήθηκε μία έρευνα για το **ύψος** των μαθητών αλλά τα δεδομένα χάθηκαν και βρέθηκε μόνο το **πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων**.



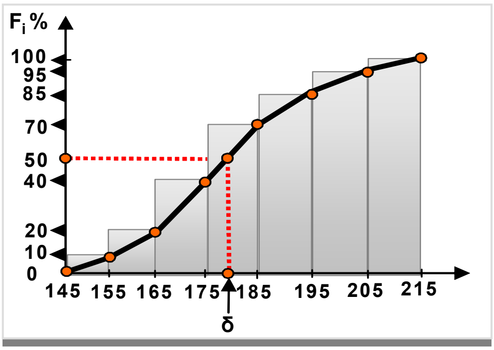
Αφού κατασκευάσουμε τον **πίνακα συχνοτήτων**

μετά θα αποδείξουμε ότι για τη **διάμεσο δ** είναι **175 < δ < 185**

Απάντηση

Χρόνια	Κέντρο Κλάσης x_i	v_i	N_i	$F_i\%$
[145-155)	150	2	2	10
[155-165)	160	2	4	20
[165-175)	170	4	8	40
[175-185)	180	6	14	70
[185-195)	190	3	17	85
[195-205)	200	2	19	95
[205-215)	210	1	20	100
Σύνολο		20		

Είναι προφανής ο πίνακας κατανομών.



Είναι προφανές ότι η **διάμεσος δ** είναι αριθμός της κλάσης **[175,185)**

Ασκήσεις

δ.1● Έστω η διπλανή ομαδοποιημένη κατανομή.

Βαθμός	v_i
[–20,–15)	15
[–15,–10)	0
[–10,–5)	8
[–5,0)	17

Να αποδείξετε ότι η **διάμεσος** της ισούται με **δ** = –**6,875**

Βαθμός	f_i
[5,15)	2x
[15,25)	2x
[25,35)	x
[35,45)	5x

δ.2● Έστω η διπλανή **ομαδοποιημένη κατανομή**.

α) Να αποδείξετε ότι **x** = **0,1**

β) Να αποδείξετε ότι η **διάμεσος δ** των παρατηρήσεων, ισούται με **δ** = **35**

δ.3● Έστω οι πιο κάτω **παρατηρήσεις**.

–25	–15	–6	–5	–5
–24	–15	–6	0	0
–24	–14	–6	0	1
–16	–6	3	4	6
–16	–6	7	7	14

α) Να **ομαδοποιήσετε** τις παρατηρήσεις του πίνακα σε **4** ισοπλατείς κλάσεις έτσι ώστε το άνω όριο της **2**ης κλάσης να είναι –**5** και το κάτω όριο της **4**ης κλάσης να είναι **5**

β) Μετά να αποδείξετε ότι η **διάμεσος** της κατανομής ισούται με **δ** = –**5,425**

δ.4● Οι πιο κάτω αριθμοί

δίνουν σε **cm** τα αναστήματα **40** μαθητών ενός σχολείου.

150	171	173	154	154	158	159	186	158	187
160	161	163	166	165	179	167	168	169	169
170	151	153	177	187	177	188	177	174	166
182	159	182	186	177	187	172	184	181	151

α) Να **ομαδοποιήσετε** τα αναστήματα σε κλάσεις πλάτους **10** cm

β) Να υπολογίσετε τη **διάμεσο** των αριθμών.

δ.5● Αν το **πολύγωνο** των **εκατοστιαίων σχετικών συχνοτήτων** μιας ομαδοποιημένης κατανομής έχει κορυφές τα σημεία **Α(3,0)**, **Β(9,10)** **Γ(15,20)**, **Δ(21,15)**, **Ε(27,55)** και **Ζ(36,0)**, να βρείτε τη **διάμεσο** της κατανομής.

δ.6● Εξετάζουμε το **βάρος** των μαθητών της **Γ'** τάξης ενός λυκείου.
Διαπιστώσαμε ότι τα βάρη αυτών **κυμαίνονται** από **60** μέχρι **80** κιλά
Μετά ήρθαν στην τάξη και **δύο** ακόμα μαθητές με βάρη **55** και **85** κιλά.
Να εξετάσετε αν **μεταβλήθηκε** η **διάμεσος**.

δ.7● Έστω ο διπλανός πίνακας.
Να **συμπληρώστε** τον πίνακα
και να υπολογίσετε τη **διάμεσο** των παρατηρήσεων.

Κλάσεις [,)	x_i	f_i
3-5		0,1
5-7		0,2
7-9		0,3
9-11		
Σύνολο		1

δ.8● Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρίας

φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

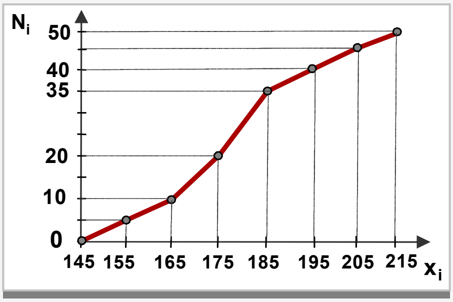
α) Να βρείτε τη **διάμεσο** της κατανομής.

β) Αν **απολυθούν 20** υπάλληλοι
με μισθό κάτω από **800** €uro
να βρείτε τη **νέα διάμεσο** της κατανομής.

γ) Να βρείτε την **εκατοστιαία μεταβολή** της διαμέσου.

Μισθοί σε εκατοντάδες €uro	v_i
[4,8)	50
[8,12)	30
[12,16)	15
[16,20)	5
Σύνολο	100

δ.9● Σε ένα **σχολείο**
πραγματοποιήθηκε μία έρευνα
για το **ύψος** των μαθητών
αλλά τα δεδομένα «**χάθηκαν»**
και βρέθηκε μόνο το **πολύγωνο**
των **αθροιστικών** συχνοτήτων.
Να υπολογίσετε τη **διάμεσο**.



δ.10● Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τους **βαθμούς** των **29** μαθητών μιας τάξης
στα **Μαθηματικά**, σε ακέραια κλίμακα.

Βαθμός	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Πλήθος μαθητών	?	0	3	2	5	?	2	4	1	1	2

Επιλέγουμε **τυχαία** ένα μαθητή της τάξης.
Αν η συχνότητα της **διαμέσου** της βαθμολογίας είναι **8** , να βρείτε τη **μέση τιμή**.

Εργασία

1 ☐ Το **άθροισμα άρτιων** παρατηρήσεων με **μέση τιμή** τον αριθμό **2005** μπορεί να είναι **περιττός αριθμός**.

2 ☐ Τα **μέτρα θέσης** που είδαμε ορίζονται **μόνο** για **ποσοτικές μεταβλητές**.

3 ☐ Η **διάμεσος** των παρατηρήσεων **5**, **0**, **1**, **1**, **2**, **3**, **3**, **3**, **4** είναι το **2**

4 ☐ Αν σε ένα δείγμα έχουμε τιμές μόνο τις **2** και **4**, τότε η **μέση τιμή** είναι **3**

5 ☐ Αν η **διάμεσος**
είναι μία **τιμή** της μεταβλητής, τότε έχουμε **περιττό αριθμό** παρατηρήσεων
και αν δεν είναι **τιμή** της μεταβλητής, τότε έχουμε **άρτιο αριθμό** παρατηρήσεων.

6● Αν η **μέση τιμή 100 παρατηρήσεων** είναι **20** και η **μέση τιμή 50** από **αυτών** είναι **15**, να βρείτε τη **μέση τιμή** των **υπολοίπων**.

7● Σε ένα **διαγώνισμα** Μαθηματικών, η **μέση βαθμολογία** των **36 αγοριών** ήταν **12** και η **μέση βαθμολογία** των **24 κοριτσιών** ήταν **17**
Να βρείτε τη **μέση βαθμολογία** όλων των μαθητών **μαζί**.

8● Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + \alpha$, με $\alpha \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η **f** είναι **γνήσια αύξουσα**.
β) Να αποδείξετε ότι **δεν υπάρχει** αριθμός **α**
ώστε η **μέση τιμή** των **f(1)**, **f(2)**, **f(3)**, **f(4)**, **f(5)** να ισούται με την **διάμεσο**.

9● Η ομάδα **μπάσκετ** αγοριών, ενός σχολείου αποτελείται από **10** παίκτες.
Αυτή έχει **μέσο ύψος 192 cm**. Σε κάποιον αγώνα, έλειπε ένας παίκτης με ύψος **198 cm** και αντικαταστάθηκε από άλλον που είχε ύψος **188 cm**
Να βρείτε το **μέσο ύψος** που είχε η ομάδα στον αγώνα αυτό.

10● Στο διπλανό πίνακα, δίνονται οι **τιμές** μιας μεταβλητής **X**
με τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.
Αν η **διάμεσος** είναι **25**, να **βρείτε** την τιμή του **λ**

Τιμές	Συχνότητες
10	10
20	λ
30	5
40	20

11● Οι θερμοκρασίες των **20** πρώτων ημερών του μήνα Απριλίου σε βαθμούς Κελσίου **°C** φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x_i	v_i
22	2
23	4
24	
25	
26	2
27	3

Η **μέση θερμοκρασία** των παραπάνω ημερών είναι **24,4°C**

α_1) Να **συμπληρώσετε** τον πίνακα.

α_2) Να βρείτε την **διάμεση** θερμοκρασία.

β) Από κάποιο όμως λάθος διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο έδειχνε **ένα βαθμό περισσότερο** από το κανονικό.
Να βρείτε τη **νέα πραγματική μέση θερμοκρασία**.

γ) Τώρα μετά την αλλαγή των θερμοκρασιών, να **ομαδοποιήσετε** τα δεδομένα σε **3** κλάσεις ίσου πλάτους **2** και να **βρείτε** την **νέα μέση τιμή**.

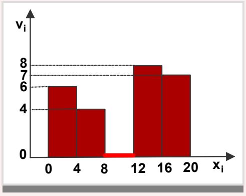
12● Η βαθμολογία **50 μαθητών** στην Ιστορία κυμαίνεται από **10** μέχρι **20** και κανένας **δεν** είναι **«κάτω»** από τη **βάση**.

Γνωρίζουμε επίσης ότι **23** μαθητές έχουν βαθμό «**κάτω**» από **12**

24 μαθητές **«πάνω»** από **15** και **3** μαθητές έχουν βαθμούς **13**, **13** και **14**

Να υπολογίσετε τη **διάμεσο** των παρατηρήσεων.

13● Στην μία τάξη της **Γ′** Λυκείου τα αποτελέσματα σε ένα **διαγώνισμα Μαθηματικών** φαίνονται στο διπλανό **ιστόγραμμα**.



α) Να βρείτε το **πλήθος** $\mathbf{v}$ των μαθητών.

β) Να **κατασκευάσετε** το **ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών** συχνοτήτων.

γ) Να αποδείξετε ότι η **διάμεσος** βαθμολογία $\boldsymbol{\delta}$ βρίσκεται στο διάστημα **[12,16)**

14● Έστω το **δείγμα** μεγέθους $\mathbf{v}$

Έστω και οι παρατηρήσεις: $t_1, t_2, ..., t_v$ με **μέση τιμή** $\bar{x}$

Θεωρούμε τώρα και **μία ακόμη παρατήρηση**, την t_{v+1}

Έστω και $\bar{x}'$ η **μέση τιμή** των παρατηρήσεων $t_1, t_2, ..., t_v, t_{v+1}$

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x}' = \dfrac{v\bar{x} + t_{v+1}}{v+1}$

β) Έστω το δείγμα μεγέθους $v = 10$, με **μέση τιμή** των παρατηρήσεων την $\bar{x} = 5$

Προσθέτουμε και 11^{η} παρατήρηση και η **νέα μέση τιμή** όλων μαζί γίνεται $\bar{x}' = 6$

Να βρείτε την **τιμή** της $11^{\eta\varsigma}$ παρατήρησης.

15● Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι η **ελάχιστη τιμή** της f είναι ίση με $f(\ln 2) = 2 - \ln 4$

β) Η μεταβλητή ενός δείγματος **Α** μεγέθους $\nu \in N$ έχει **τιμές** $t_1, t_2, t_3, ..., t_\nu$

και η μεταβλητή ενός άλλου δείγματος **Β** μεγέθους $\nu \in N$

έχει τιμές τις $e^{t_1} - t_1, e^{t_2} - t_2, e^{t_3} - t_3, ..., e^{t_\nu} - t_\nu$

Να αποδείξετε ότι για τις **μέσες τιμές** των δύο δειγμάτων είναι $\bar{x}_A < \bar{x}_B$

16● Σε μία παρέα, η **μέση ηλικία** των ατόμων αυτής ήταν **25** έτη.

Κάποια στιγμή ήρθαν στην παρέα **άλλοι δύο**, με ηλικίες **27** και **23**

α) Να αποδείξετε ότι η **μέση τιμή** των ηλικιών **δεν μεταβλήθηκε**.

β) Στη συνέχεια ήρθε και **ένα ακόμη άτομο** ηλικίας **64** ετών και η **μέση τιμή** των ηλικιών **αυξήθηκε** κατά **3**

Να αποδείξετε ότι η **αρχική παρέα** είχε **10** άτομα.

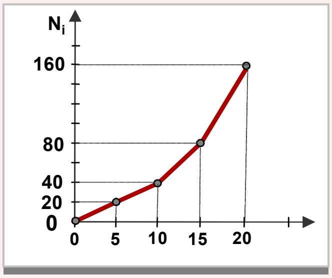
17● Αν η **διάμεσος** των ν πρώτων φυσικών αριθμών $1,2,3,...,\nu$ είναι $\delta = 10,5$

να αποδείξετε ότι $\nu = 20$

18● Σε ένα **σχολείο** πραγματοποιήθηκε μία έρευνα για τους **βαθμούς** των μαθητών σε κλίμακα από **0** μέχρι **20**

Τα δεδομένα «χάθηκαν» και βρέθηκε μόνο το **πολύγωνο** των **αθροιστικών** συχνοτήτων.

Να αποδείξετε ότι η **διάμεσος** είναι ίση με **15**



19● Έστω η πιο κάτω **ομαδοποιημένη** κατανομή σε **4** ισοπλατείς κλάσεις.

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	$F_i\%$
	10	5			
[20 , …)		15			
	50	25			
			0,1		
Σύνολο					

α αποδείξετε ότι η για τη **διάμεσο δ** και τη **μέση τιμή μ** είναι $\delta - \mu = 2$

Απαντήσεις των ασκήσεων

2.4 Μέτρα θέσης

α Μέση τιμή σε διακριτές μεταβλητές

α.1 Λ

α.2● 10

α.3● $\frac{8}{7}$

α.4● 3

α.5● $\bar{x}_\kappa = \frac{177,6}{12} = 14.8$

α.6●

α.7● Α) $\bar{x} = 3,3$ Β) $\bar{x} = 14,5$ Γ) $\bar{x} = 114$ Δ) $\bar{x} = 2,4$

α.8● Α) $\alpha = 16$ Β) $\alpha = 0,1 \quad \beta = 0,5$

α.9● α) $\bar{x}_1 = 206,1\,cm$ β) $235\ cm$

α.10●

α.11● α) $\bar{x} = \frac{55}{15}$

β) $v = 15$, $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$, $v_4 = 4$, $v_5 = 5$

α.12● $v = 5$ $\bar{x} = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-10}{-2} = 5$

α.13● Άρα η πρώτη επιλογή θα τους «βοηθήσει»

α.14● α) $\bar{x} = 14$ β) $\bar{x} = 13$

α.15● $\bar{x}_2 = 15,5$

α.16● α) β)

α.17●

α.18● α_1) α_2) β_1) 0,1,2 β_2)

β Μέση τιμή σε συνεχείς μεταβλητές

[,)	x_i	v_i	$x_i v_i$
[1 – 3)	2	5	10
[3 – 5)	4	8	32
[5 – 7)	6	16	96
[7 – 9)	8	14	112
[9 – 11)	10	7	70
Σύνολο		50	320

β.1● $\bar{x} = 11,5$

β.2● Α) $\overline{x} = 7$ Β) $\overline{x} = 7{,}75$

β.3● $\overline{x} = 6{,}4$

[,)	x_i	f_i	$x_i f_i$
[3 – 5)	4	0,1	0,4
[5 – 7)	6	0,2	1,2
[7 – 9)	8	0,3	2,4
[9 – 11)	10	0,4	4
Σύνολο		1	8

β.4● α) β) $\overline{x} = 7{,}2$

β.5● α) β) 25

β.6● $\overline{x} = 8$

β.7● α) β) 30

β.8● $\overline{x} = 15$

β.9● $\overline{x} = 179$ cm

γ Διάμεσος σε διακριτές μεταβλητές

γ.1 Σ

γ.2 Λ

γ.3 Σ

γ.4 Λ

γ.5● $t_1 = 1$, $t_3 = 5$

γ.6✷ Γ

γ.7 Σ

γ.8● $\delta = 5$, $\delta = 5$

γ.9● $\delta = 2{,}5$, $\delta = 3$

γ.10● $\delta = 151{,}5$, $\delta = 153$

γ.11● $\kappa = -2$, $\delta = 3$

γ.12●

γ.13● $\lambda = 5$

γ.14●

γ.15● $\delta = 64$

γ.16● α) β) $\delta = f(0) = 0$

γ.17● α) β) γ)

γ.18● $\delta = 2{,}5$ Εφημερίδες

δ Διάμεσος σε συνεχείς μεταβλητές

δ.1●

δ.2● α) β)

Κλάσεις	ν_i
[–25,–15)	5
[–15,–5)	8
[–5,5)	8
[5,15)	4

δ.3● α) β)

δ.4● α) **δ = 170** β)

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i	F_i
[150,160)	155	10	0,25	0,25
[160,170)	165	10	0,25	0,50
[170,180)	175	10	0,25	0,75
[180,190)	185	10	0,25	1,00
Σύνολο		40	1	

δ.5● **δ ≈ 24,54**

δ.6● Η διάμεσος **δεν** θα μεταβληθεί.

δ.7●

Κλάσεις	x_i	f_i	F_i
[3,5)	4	0,1	0,1
[5,7)	6	0,2	0,3
[7,9)	8	0,3	0,6
[9,11)	10	0,4	1
Σύνολο		1	

δ.8● α) **δ = 8** β) **δ ≈ 9,33** γ) **≈ 16,63%**

δ.9● **δ ≅ 178,3**

δ.10● $\bar{x} = 15,8$

Εργασία

1 ▢ **Λ** **2** ▢ **Σ** **3** ▢ **Λ** **4** ▢ **Λ** **5** ▢ **Λ**

6● $\bar{x} = 25$

7● $\bar{x} = 14$

8● α) β)

x_i	ν_i
22	2
23	4
24	6
25	3
26	2
27	3

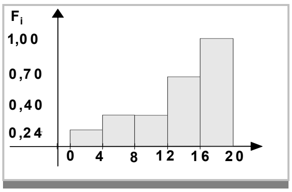
9● $\bar{x}' = 191$

10● $\lambda = 5$

11● α_1) α_2) **δ = 24** β) $\bar{x}' = 23,4$ γ) $\bar{x}'' = 23,9$

12● **δ = 14**

13● α) **ν = 25** β)



γ)

14● α) β) $t_{11} = 16$

15● α) β) **16●** α) β) **17●** **18●** **19●**